

INICIAÇÃO À DEMONSTRAÇÃO APREENDENDO CONCEITOS GEOMÉTRICOS

Prof. Dr. Saddo Ag Almouloud, PUC-SP

Profa. Elizabeth Gervazoni Silva de Mello, Uni-Mogi das Cruzes

Introdução

Um dos problemas enfrentados pelo sistema de ensino brasileiro refere-se ao baixo desempenho dos alunos do Ensino fundamental, em Matemática. As recentes avaliações feitas pelo SAEB/MEC pela Secretaria de Educação de São Paulo evidenciam que esse desempenho torna-se ainda mais baixo quando o tema abordado é a Geometria.

Na prática, vem sendo dada à geometria menos atenção do que ao trabalho com outros temas e, muitas vezes, confunde o seu ensino, com o de medidas.

A geometria é um ramo importante da Matemática tanto como objeto de estudo, como instrumento para outras áreas. No entanto, os professores do ensino fundamental apontam a geometria como um dos problemas de ensino-aprendizagem. O diagnóstico dessa situação vem sendo discutido nos meios acadêmicos, em alguns segmentos da sociedade e inclusive, em algumas instancias governamentais. A Secretaria de Ensino Fundamental do MEC colocou em discussão nacional, os Parâmetros curriculares e apontou a necessidade de revisão na formação de professores para a efetiva implantação de novas alternativas.

Nas raízes da questão particular do baixo desempenho em Geometria alguns fatos se destacam:

- grande parte dos professores que hoje estão em atividade receberam uma formação de base muito precária em Geometria, devido à própria influência que o movimento da Matemática Moderna desempenhou em nossos currículos nas décadas de 60/70;
- os cursos de formação inicial de professores - tanto os cursos de magistério como os de licenciatura - continuam não dando conta de discutir com seus alunos uma proposta mais eficiente para o ensino de geometria;
- também as modalidades de formação continuada, postas em ação nos últimos anos, basicamente na forma de cursos de reciclagem, não têm atingido, igualmente, o objetivo

de mudar a prática na sala de aula em relação ao ensino de Geometria.

Embora os currículos mais recentes destaquem a importância de se resgatar o trabalho com Geometria no Ensino Fundamental, o professor não sabe claramente o que fazer.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais (1998) enfatizam a importância da geometria no quarto ciclo (7ª e 8ª série) e da importância da construção de situações-problema que favoreçam o raciocínio dedutivo e a introdução da demonstração, apresentando verificações empíricas:

“Os problemas de geometria vão fazer com que o aluno tenha seus primeiros contatos com a necessidade e as exigências estabelecidas por um raciocínio dedutivo. Isso não significa fazer um estudo absolutamente formal e axiomático da geometria”.

Embora os conteúdos geométricos propiciem um campo fértil para a exploração dos raciocínios dedutivos, o desenvolvimento dessa capacidade não deve restringir-se apenas a esses conteúdos. A busca da construção de argumentos plausíveis pelos alunos vem sendo desenvolvida desde os ciclos anteriores em todos os blocos de conteúdos.”(p. 86)”.

Os PCNs dão ênfase à figura geométrica e salienta as principais funções do desenho: visualizar, fazer ver, resumir, ajudar a provar e a conjecturar.

O objetivo deste trabalho é propor uma reflexão didática sobre os problemas de ensino-aprendizagem dos conceitos geométricos nos 3º e 4º ciclos básicos do ensino fundamental, e uma apresentação dos principais resultados de uma seqüência didática tendo por intuito a iniciação à demonstração no ensino da Geometria.

Problemas ligados à formação de conceitos geométricos nos alunos de 3º e 4º ciclos básicos

O ensino de Matemática no Brasil, conforme pesquisa feita pelo Sistema Nacional de Avaliação Básica (SAEB), de 1993, detectou sérios problemas: apenas 3,1% dos alunos de 5ª série e 5,9% dos alunos da sétima série acertaram entre 50% e 100% das questões propostas de Matemática.

O programa de Avaliação Educacional da Rede Estadual da Secretaria de Estado da Educação de São Paulo (SEE), criado em 1992, realizou avaliações do rendimento escolar

nas Escolas-Padrão com intuito de obter informações para a formulação de políticas educacionais e de informar as escolas com dados objetivos acerca dos pontos críticos do processo ensino-aprendizagem.

O insucesso que caracteriza as experiências de tantos alunos com a matemática, principalmente com a geometria, como mostrou a Avaliação Educacional da Rede Estadual da SEE, revela que muitos tópicos de Matemática não são planejados ou não são ensinados, portanto não são aprendidos. Até a oitava série, embora quase todos os professores achem que a Geometria é importante para merecer um lugar em todos os níveis do ensino, não há concordância quanto ao conteúdo ou à seqüência do ensino da geometria. Significa, pois, que os professores não podem esperar que seus alunos tenham acumulado previamente mais do que um conhecimento em Geometria fundado em experimentação.

Várias pesquisas mostraram as dificuldades que nossos alunos enfrentam na aquisição da matemática, em particular da Geometria. Morgado (1997) assinala que, a visão que vem dirigindo nosso ensino da Matemática há vários séculos é a visão absolutista da Matemática, que gera uma dinâmica de ensino em que os alunos acumulam informação. A maioria dos professores segundo essa visão, ao utilizar um processo de transmissão de informação, conduz a experiência matemática do aluno por caminho no qual ele não analisa a Matemática como uma área de pesquisa e investigação. Ao preparar com antecedência os problemas a serem apresentados aos alunos, o professor reserva para si a transposição dos obstáculos e o caminho produtivo da descoberta, apresentando ao aluno uma solução bonita e eficiente, sem deixar o legítimo ato de pensar matematicamente.

Segundo Duval (1995), a geometria envolve três formas de processo cognitivo que preenchem específicas funções epistemológicas:

- **visualização** é o processo que examina o espaço-representação da ilustração de uma afirmação, para a exploração heurística de uma situação complexa, por uma breve olhada ou por uma verificação subjetiva;
- **construção** (processo por instrumentos) é a construção de configurações, que pode ser trabalhado com um modelo, em que as ações representadas e os resultados observados são ligados aos objetos matemáticos representados;
- **raciocínio** na relação no processo do discurso para a extensão do conhecimento, para a prova e a explicação.

Segundo ainda o autor, esses três espécies de processos cognitivos são entrelaçados em sua sinergia e cognitivamente necessários para a proficiência da geometria. Por outro lado, a heurística dos problemas de geometria refere-se a um registro espacial que dá lugar as formas de interpretações autônomas. Para essas interpretações, Duval (1995) distingue três tipos de apreensões:

- **seqüencial**: é solicitada nas tarefas de construção ou nas tarefas de descrição com objetivo de reproduzir uma figura;
- **perceptiva**: é a interpretação das formas da figura em uma situação geométrica;
- **discursiva**: é a interpretação dos elementos da figura geométrica, privilegiando a articulação dos enunciados, pois as mergulha numa rede semântica de propriedades do objeto;
- **operatória**: é uma apreensão centrada sobre as modificações possíveis de uma figura de partida e sua reorganização perceptiva que essas modificações sugerem.

A resolução de problemas de geometria e a entrada na forma de raciocínio que essa resolução exige, depende da tomada de consciência da distinção das formas de apreensão da figura. A apreensão operatória das figuras depende das modificações que a figura pode sofrer, que são classificadas por Duval (1995) do seguinte modo:

- **modificação “mereológico”**: a figura pode separar-se em partes que são subfiguras da figura dada, fracionando-se e reagrupando-se, isto é, uma relação da parte e do todo;
- **modificação ótica**: é a transformação de uma figura em outra chamada sua imagem;
- **modificação posicional** : é o deslocamento em relação a um referencial.

Essas modificações são realizadas psiquicamente, graficamente e mentalmente. O interesse de fracionar uma figura ou seu exame a partir de partes elementares está ligado à operação de **reconfiguração** intermediária. A reconfiguração é a operação que consiste em organizar uma ou várias subfiguras diferentes de uma figura dada em outra figura. Com efeito, as partes elementares obtidas por fracionamento podem ser reagrupadas em muitas subfiguras, todas dentro da figura de partida. Essa operação permite, portanto engrenar imediatamente os tratamentos tais como as medidas de áreas por soma de partes elementares, ou evidenciar a equivalência de dois reagrupamentos intermediários.

Analisando as causas do fracasso no ensino-aprendizagem da demonstração em geometria, Duval (1996) diz que ela envolve uma atividade cognitiva específica e que sua

aprendizagem não está ligada a uma situação de interação social, nem subordinada a um jogo de pressões internas de um objeto. Ela é um modo de processamento cognitivo autônomo com características específicas em relação a qualquer outra forma de funcionamento do raciocínio, como a indução, a argumentação, a interpretação. De um lado, ela articula os enunciados em função do estatuto que lhe é reconhecido e não em função de seu significado, por outro lado, ela se faz em progressão por substituição de enunciados e não pelo encadeamento. A aprendizagem da demonstração, para Duval, consiste primeiramente na conscientização de que se trata de discurso diferente do que é praticado pelo pensamento natural. O que o matemático particularmente chama de “dedução” é, do ponto de vista cognitivo, uma substituição de enunciados feita em função de seu estatuto. A compreensão operatória das definições e dos teoremas supõe que estes sejam vistos como regras de substituição. Para o autor, a dedução é uma forma de cálculo cuja organização não está automatizada, e, a tomada de consciência do que é uma demonstração somente ocorre numa articulação de dois registros, dos quais um é a utilização pelo aluno da linguagem natural. Essa tomada de consciência surge da interação entre a representação não discursiva produzida e a do discurso expresso. Tal interação não ocorre ou não tem a mesma importância se representação e expressão são propostas dentro de um outro discurso.

Para Duval (1988, p.57), os problemas de geometria apresentam uma grande originalidade em relação a muitas outras tarefas matemáticas que podem ser propostas aos alunos. De um lado, suas resoluções exigem uma forma de raciocínio que implica a referência a axiomática local, a qual se desenvolve no registro da língua natural. Esta forma de raciocínio conduz ao desenvolvimento de um tipo de discurso que funciona por substituição como se tratasse de uma linguagem formalizada, entretanto, esta forma de raciocínio desenvolve-se se apoiando num registro sobre o qual o discurso se constrói, de forma natural, por associação e por acumulação. Ainda segundo o autor, favorecer o desenvolvimento das funções cognitivas, organizando problemas de geometria matematicamente próximos que solicitem os mesmos conhecimentos, determina uma categorização cognitiva indispensável ao aprendizado da demonstração. Sendo assim, Duval (1995) identifica três níveis de problemas:

- Nível 1: aqueles em que há congruência operatória da figura e um tratamento

matemático, neste caso uma apreensão discursiva explícita não é necessária.

- Nível 2: aqueles em que a apreensão discursiva é necessária, porque não há mais congruência da figura ou porque é explicitamente pedido como justificativa.
- Nível 3: aqueles que exigem mais que uma apreensão discursiva, o recurso aos esquemas formais lógicos específicos tais como o raciocínio disjuntivo, o raciocínio por contraposição.

O mesmo autor, em sua análise, destaca as condições facilitadoras do aprendizado da geometria:

- Prática sistemática dos problemas de nível um;
- Distinção entre apreensão perceptiva e discursiva;
- Representação de uma rede de propriedades formando uma rede semântica de todos os conhecimentos solicitados na demonstração;
- Compreensão da diferença entre uma argumentação no quadro da prática natural do discurso e articulação dedutiva.

Várias pesquisas sobre o ensino-aprendizado da geometria apontam fenômenos geradores de obstáculos de origem epistemológica, de origem didática e de origem lingüística.

No que diz respeito aos obstáculos epistemológicos:

- A demonstração usando o raciocínio por é um obstáculo na história da geometria e no ensino atual (Duval, 1995).
- A coordenação dos diferentes registros de representação (a escrita algébrica, as figuras geométricas, o discurso na língua natural) ligados ao tratamento dos conhecimentos não se opera espontaneamente, mesmo ao curso de um ensino que mobilize essa diversidade de registros (Duval, 1995).
- As figuras formam um suporte intuitivo importante nos passos da demonstração em geometria, elas dão uma visão maior do que o enunciado, elas permitem explorar, antecipar. Mas, nem sempre facilitam “ver” sobre a figura as relações ou as propriedades em relação às hipóteses dadas as quais correspondem à solução procurada (Duval, 1995). A figura como suporte das hipóteses num problema que envolve demonstração, pode ser

um obstáculo ao aluno, pois, ele pode abandonar ou inserir hipóteses de acordo com o desenho, pode construir figuras particulares (um triângulo qualquer se torna isósceles; duas retas secantes tornam-se perpendiculares).

- Os alunos acham inútil ou às vezes absurdo terem de demonstrar uma propriedade que se “vê” sobre a figura.
- A não constituição de uma rede semântica dos objetos matemáticos e dos teoremas solicitados por uma demonstração associada ao registro de representação em uma rede de propriedades lógicas, pode constituir um obstáculo ao aprendizado da demonstração.

No que diz respeito aos obstáculos didáticos:

- Os tipos de problemas, observados em livros didáticos, em geral, não propõem questões envolvendo demonstração (Gouveia, 1998).
- A passagem da geometria empírica para a geometria de dedução é um obstáculo para a demonstração (Muller, 1994).
- Segundo Vianna (1988), muitos professores deixaram de incentivar os alunos a fazerem quaisquer demonstrações, justificando que não dá tempo nem de ensinar Geometria quanto mais para demonstrar teoremas.
- Muller (1994) observa que a aprendizagem da demonstração tem ocorrido muitas vezes por analogia. O professor propõe um modelo submetido à observação e o aluno é levado a imitar o método de resolução, numa situação aproximada. E os alunos têm dificuldades em mobilizar os saberes.

No que diz respeito aos obstáculos lingüísticos

Geralmente a maioria dos alunos lê pouco e tem dificuldades em decompor as definições e propriedades matemáticas. A dificuldade dos alunos de interpretarem corretamente um problema e a incapacidade em produzir a explicação de sua solução com um mínimo de vocabulário apropriado mostram sua dificuldade em entender os textos mais simples.

As informações contidas no enunciado obedecem a regras matemáticas precisas. Ao compreender seu senso global o aluno estará capaz de selecionar as informações principais e de revelar as relações entre elas. Uma má leitura pode conduzir a não respeitar as relações das instruções e conseqüentemente cometer erros.

Segundo Muller (1994), uma parte das dificuldades dos alunos a propósito de problemas geométricos se situa em nível do vocabulário: leitura (compreensão dos enunciados) e redação (formulação de argumentos):

- O aluno pode raciocinar corretamente e enxergar a solução de um problema de geometria e ter dificuldade em responder com argumentos precisos.
- A leitura incorreta de definições leva à não compreensão dos objetos matemáticos envolvidos nessa definição.

Uma proposta para a introdução da demonstração no ensino da geometria

Diante desse quadro, estamos desenvolvendo um projeto de pesquisa intitulado “Estudo dos fenômenos de ensino-aprendizagem dos conceitos geométricos” que tem por objetivo uma reflexão sobre os problemas da formação dos conceitos geométricos nos alunos, bem como sobre a formação dos professores dos 3º e 4º ciclos básicos. No quadro de nossa problemática de pesquisa, Elizabeth G. S. de Mello, sob nossa orientação, desenvolveu uma pesquisa tendo como objetivo investigar o problema da demonstração e buscar alternativas e respostas para os desafios colocados ao ensino de Geometria no Ensino Fundamental.

Os estudos feitos sobre o ensino-aprendizagem da demonstração e nosso próprio estudo preliminar mostram as dificuldades que os alunos encontraram na aquisição dos conceitos geométricos. Um dos problemas que favorecem o fraco desempenho de alguns alunos no que diz respeito aos conceitos e habilidades geométricas, é devido à prática e às escolhas didáticas dos professores quando ensinam a geometria.

Os alunos de quinta à oitava séries não parecem usufruir de um ensino que lhes proporcione condições para:

- Compreender a mudança do estatuto da figura, os estatutos da definição e teoremas geométricos, das hipóteses (dados do problema) e conclusão (ou tese).
- Saber utilizar as mudanças de registros de representações.
- Apropriar-se o raciocínio lógico-dedutivo.

Para minimizar esses problemas, deve-se construir situações de ensino-aprendizagem, considerando-se os seguintes aspectos:

- Figuras geométricas tendo um papel heurístico, levando em conta suas diferentes apreensões: perceptiva, discursiva, operatória e seqüencial.
- *Demonstração* como parte integrante do processo ensino-aprendizagem dos conceitos/habilidades geométricos e do raciocínio lógico-dedutivo.
- A importância dos registros de representação (desenho/figura geométrica, linguagem natural, linguagem matemática).

Apoiando-se nas seguintes hipóteses, consideramos o estudo da *demonstração* em geometria, sendo técnica, como um dos meios permitindo aos alunos compreender melhor os conceitos geométricos e adquirir algumas habilidades em geometria.

1- O processo de aquisição dos conhecimentos, em particular dos conhecimentos em geometria apoia-se sobre os seguintes aspectos:

- Observação de provas associadas a tomadas de decisão.
- A atividade de resolução de problemas geométricos.
- Atividade de formulação.
- Entendimento e redação da solução de problemas.

2- A resolução de problemas de geometria e a entrada na forma de raciocínio, que essa resolução exige, está associada a distinção das apreensões da figura (apreensões seqüencial, perceptiva, discursiva e operatória).

3- As representações semióticas não são somente necessárias para fins de comunicação, são também essenciais para as atividades cognitivas do pensamento. A atividade exigida em geometria, no Ensino Fundamental, faz apelo a três registros e sua coordenação: o registro da língua natural, o registro das figuras e o registro matemático (ou das escritas algébricas).

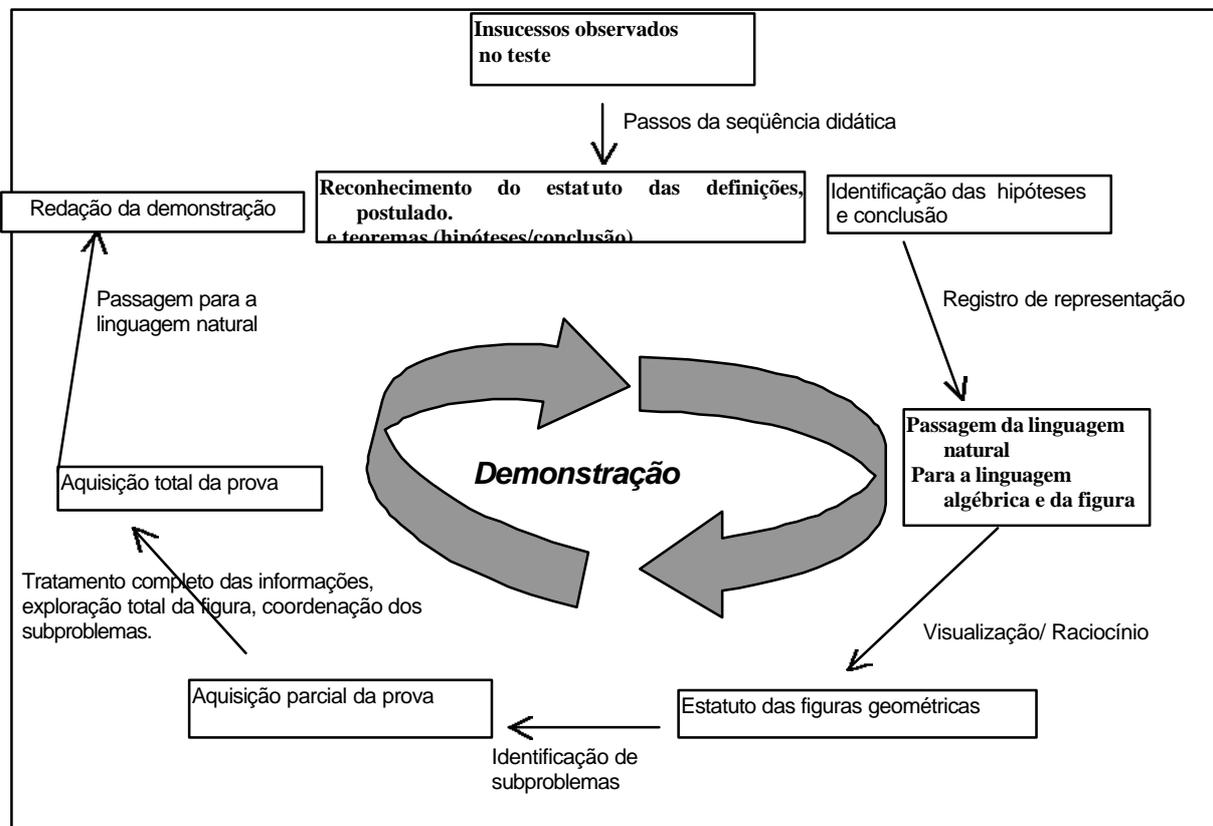
4- A construção de situações para a sala de aula, nas quais a iniciação à *demonstração* tem um papel importante, leva os alunos de 5ª à 8ª série a uma melhor compreensão dos conceitos geométricos e à aquisição de habilidades geométricas.

5- A técnica da *demonstração* está mais associada a uma hierarquia de tarefas do que a uma hierarquia de conteúdos (cf. Esquema abaixo).

Considerando as dificuldades levantadas por Duval (1995), entre outros, bem como pelos dados obtidos em nossa pesquisa preliminar, desenvolvemos uma seqüência didática para validar nossas hipóteses, tendo em vista os aspectos teóricos e processos que favorecem a construção dos conceitos geométricos.

As situações construídas levam em conta também a significação da *demonstração*, segundo Balacheff (1987,1988), que faz a distinção entre explicação, prova e *demonstração*. A definição de *demonstração*, segundo o autor, determina uma atividade do raciocínio. A *demonstração* tem por objetivo explicar validando, isto é, levando à convicção, a partir de uma seqüência de enunciados organizados, numa regra de dedução que interfere nas capacidades cognitivas, metodológicas e lingüísticas.

De acordo com esta definição, organizamos nossa seqüência didática, apoiada no esquema abaixo.



Passos do esquema:

- 1- Conhecer o estatuto das definições, os postulados e os teoremas pois estes são as ferramentas a serem usadas na *demonstração*.
- 2- Efetuar as mudanças dos três registros de representação semiótica.
- 3- Coordenar os registros de representação semiótica ajudará o aluno a se apropriar dos conceitos envolvidos nos problemas com *demonstração*.
- 4- Compreender, através da visualização-raciocínio o estatuto da figura, dominando as mudanças de linguagem: natural para a linguagem matemática e para a linguagem da figura.

- 5- Identificar os subproblemas e as ferramentas necessárias para resolvê-los.
- 6- Organizar de modo lógico as provas parciais através do tratamento completo das informações, associado à exploração e à organização de um esquema da *demonstração*.
- 7- A redação da *demonstração* na linguagem natural completa a administração geral das provas parciais.

Embora a aplicação de nossa seqüência didática seja prevista para uma curta duração, espera-se que o aluno compreenda o estatuto de definição e teorema, saiba utilizar as mudanças de registro de representação e se aproprie do raciocínio lógico-dedutivo da *demonstração*.

Trabalhamos com uma classe de 14 alunos de oitava série do ensino fundamental. A seqüência é composta de oito sessões (de 40 minutos) enfocando os seguintes aspectos:

- atividades de interpretação e de compreensão de definições, teoremas, e enunciados de problemas
- organização de uma “caixa de ferramentas”
- atividades de construção geométricas e análise de figuras geométricas
- apresentação de esquema de demonstrações (rede semântica)
- apresentação de atividades com demonstrações que envolvam as ferramentas básicas (definições e propriedades geométricas estudadas)
- avaliação do desempenho dos alunos (um teste intermediário e um pos-teste).

Esperamos que a aplicação da seqüência didática produza efeitos positivos, apesar da técnica da *demonstração* ser muito complexa e sua hierarquia de tarefas envolver ferramentas distintas em cada problema.

Retomando as considerações da problemática

As atividades se desenvolveram no decorrer da aplicação da seqüência didática, num processo de aprendizado através de discussão, distinção entre definição e propriedade, associação dos registros de representação e estabelecimento de um conceito usando uma definição ou uma propriedade.

De acordo com os resultados observados durante a aplicação da seqüência didática, constatamos uma nova postura questionativa dos alunos sobre a veracidade das

propriedades geométricas e discussões entre eles frente às definições dos objetos matemáticos da geometria euclidiana.

Os alunos participantes de nossa pesquisa já tinham estudado o conteúdo de nossa seqüência didática em outro “cenário” sem as exigências do aprendizado da técnica da *demonstração*. Além disso, eles participavam de aulas de desenho Geométrico. Mesmo assim, observamos dificuldades frente às atividades propostas, quanto ao desenvolvimento das seguintes habilidades geométricas: distinção entre definições e teorema, reconhecimento de hipóteses e conclusão de uma propriedade; entendimento da figura geométrica, associada a um teorema, como “âncora das hipóteses”; compreensão das mudanças de registro de representação; organização da prova e redação da *demonstração*.

No decorrer da seqüência houve um crescimento da desenvoltura dos alunos em realizar as tarefas. Na sessão sete, os alunos já participavam voluntariamente de construções de figuras no quadro negro, ultrapassando a apreensão perceptiva, justificando todas as reconfigurações intermediárias que observavam, completando o esquema da *demonstração* com sucesso, também nessa sessão, os alunos já observavam que a *demonstração* explica a verdade da afirmação.

Os resultados do pós-teste revelaram-nos a habilidade dos estudantes em: desenvolver a figura, organizar as hipóteses, identificar a conclusão, destacar as definições e propriedades envolvidas na *demonstração* e organizar a redação da *demonstração*. Sendo que dois alunos conseguiram um acerto total e oito, um acerto parcial, pois deixaram de identificar uma das propriedades no desenvolvimento dessa *demonstração*.

A hierarquia de tarefas em um esquema de atividades mostrou-se uma alternativa metodológica favorecendo a exploração das várias etapas da resolução de problemas com demonstrações.

Outro aspecto importante é a identificação da propriedade ou da definição compatível com a solução de um subproblema, essa identificação nem sempre era evidente para todos os alunos. Porém, procuramos conduzir o aluno, durante a aplicação da seqüência, à compreensão da situação do problema. Para isso, usamos a figura associada ao esquema da *demonstração* com o intuito de desenvolver as várias apreensões perceptivas, discursivas e operatórias. Os alunos, gradualmente, efetuaram as mudanças de tratamento no registro de representação algébrica e da figura. Acreditamos que a mudança de

tratamento (interna ao registro), dificulta a “substituição” das hipóteses da propriedade pelas hipóteses do problema e também a identificação dos atributos essenciais e específicos de um objeto matemático. Porém constatamos, a partir das decisões dos alunos e do tipo de questionamento, que as dificuldades, relativas às mudanças de registro, foram diminuindo progressivamente com o decorrer das sessões.

A caixa de ferramentas teve um papel importante no decorrer da aplicação da seqüência didática, pois as suas ferramentas auxiliaram os alunos na descoberta das soluções dos subproblemas. Porém, apresentamos nas caixas somente as ferramentas necessárias e suficientes para a solução dos subproblemas. Julgamos que para dar continuidade ao aprendizado da *demonstração* é necessário que o aluno não apenas manipule as ferramentas apresentadas nas caixas, mas também desenvolva a capacidade de selecionar, entre as definições e propriedades que ele estudou, as ferramentas adequadas à resolução do problema.

Constatamos no pós-teste essa dificuldade de utilizar as ferramentas necessárias à resolução do problema, pois só dois alunos conseguiram, com sucesso, usar as ferramentas adequadas para a organização da *demonstração*. A respeito do desenvolvimento dessa habilidade, constatamos a importância de: identificar as ferramentas (reconhecer as hipóteses e conclusão das propriedades, estabelecer as definições dos objetos envolvidos no problema) e ter a habilidade de articular essas ferramentas adequadamente. Esse exercício de raciocínio exige bastante discussão e prática sistemática de problemas de geometria com *demonstração*.

Acreditamos que a coordenação de todos os subproblemas seja uma tarefa difícil para o aluno. Pois, se por um lado, o esquema da *demonstração* colabora com a identificação dos subproblemas, por outro, não delega ao aluno o planejamento da organização desses subproblemas. Nesse sentido, percebemos a necessidade de tarefas posteriores às atividades desenvolvidas em nossa seqüência didática que propiciassem os alunos a organizarem esquemas de *demonstração*.

Em nossa seqüência didática contemplamos somente os problemas de níveis (1) e (2), segundo a classificação de Duval. Os problemas do tipo (2) exigem mais do aluno: análise da figura, associada à coordenação dos registros e à compreensão global do problema. A coordenação dos diferentes registros de representação semiótica ligados ao

tratamento dos conhecimentos não se opera espontaneamente, mesmo ao curso de um ensino que mobilize essa diversidade de registros (Duval 1995). Os resultados em cada sessão confirmam a teoria de Duval, pois, apesar do extenso trabalho realizado, ainda observamos alguns alunos com dificuldades em coordenar os diferentes registros de representação semiótica.

Observamos no teste intermediário, assim como no decorrer das sessões, que a sobreposição de figuras geométricas, para alguns alunos determinava alterações nas hipóteses.

Ao estudarmos as dificuldades geradoras de obstáculos aos alunos para o aprendizado da *demonstração*, observamos que: os objetos matemáticos e os teoremas solicitados por uma *demonstração* associados a um registro de representação semiótica, em uma rede de propriedades lógicas, podem constituir um obstáculo ao aprendizado da *demonstração*. Com a finalidade de ajudar os alunos a superarem esse obstáculo, organizamos o esquema da *demonstração* e apresentamos a caixa de ferramentas em nossa seqüência didática. Ainda assim, observamos no decorrer da aplicação da seqüência a dificuldade de alguns alunos em compreender essa rede de propriedades lógicas na técnica da *demonstração*; entretanto, no pós-teste, constatamos que dois alunos conseguiram desenvolver a *demonstração* com sucesso, conseguindo assim superar essa dificuldade.

Como previsto na nossa reflexão teórica, a passagem da geometria empírica à geometria dedutiva constitui um obstáculo no início da seqüência didática, pois os alunos estavam acostumados a uma geometria de medidas e construção envolvendo aplicações de fórmulas e cálculos. Tivemos que incentivar os alunos a desenvolverem uma nova maneira de pensar, pois eles deveriam justificar o porquê de cada passagem do exercício com definições ou propriedades.

Procuramos nas várias atividades durante a seqüência didática, ajudar os alunos a superar o obstáculo lingüístico. Em quase todas as sessões, apresentamos textos entremeados com pequenas questões, com definições e propriedades. Observamos a leitura incorreta das definições levando à não compreensão dos objetos matemáticos. Procuramos fazer leituras com todo o grupo chamando a atenção à compreensão dos enunciados. Os termos pouco usados da geometria, no ensino da mesma, são muitas vezes base de confusão e de dificuldades para o aluno: como por exemplo, mediatriz, ângulos

congruentes, triângulos isósceles e outros como observamos no decorrer da seqüência didática, isto prejudica a elaboração da figura, bem como o entendimento das hipóteses e conclusão.

Os resultados das sessões confirmam que a redação da *demonstração* constitui um obstáculo para os alunos envolvidos neste trabalho. Com o intuito de ajudar o aluno a superar esse obstáculo, apresentamos inicialmente frases misturadas aleatoriamente, ele deveria ordená-las de acordo com o esquema da *demonstração* e a partir delas formalizar a redação da *demonstração*. Observamos que essa estratégia inicial foi de grande valia para ajudar os alunos no desenvolvimento da redação da *demonstração*.

Conclusão

De acordo com o desempenho dos alunos no decorrer da aplicação da seqüência, constatamos que eles terminaram as atividades conseguindo associar os diferentes tipos de registros de representação semiótica, bem como conseguiram reconhecer o estatuto da definição e do teorema.

Fomos um pouco pretensiosos em admitir poder desenvolver a capacidade de raciocinar logicamente em geometria, através de uma seqüência didática, com oito sessões. Para desenvolver essa habilidade, precisa-se de um trabalho de longo prazo que começaria desde quinta série e tendo continuidade nas demais séries. As atividades desenvolvidas procuraram explorar a lógica na técnica da *demonstração*, assim sendo, acreditamos que contribuímos para evidenciar novos caminhos de pensar em geometria.

Uma variável difícil de administrar é a ausência do aluno durante a aplicação da seqüência didática. Essa ausência, além de prejudicar o parceiro que tinha de trabalhar individualmente, prejudicava o próprio aluno, pois, cada sessão trazia contribuições para a próxima sessão.

Outro aspecto importante é a falta de compromisso do aluno com as atividades desenvolvidas. Pois, não terá uma nota no final da seqüência e as atividades não compõem o planejamento de matemática da referida escola. Esse comportamento do aluno é conseqüência do contrato didático realizado em sala de aula. Por isso mesmo, o aluno não se empenha em dedicar um tempo, fora do horário de aplicação da seqüência, para estudar os conteúdos vistos nas sessões. Apesar de nossa finalidade ser a introdução da técnica da

demonstração através de resolução de problemas, foi essencial, paralelamente, desenvolver um embasamento teórico como suporte à seleção das ferramentas necessárias à resolução desses problemas.

Consideramos que os alunos avançaram em seus conhecimentos em geometria, pois demonstraram certos avanços no que diz respeito aos seguintes aspectos:

- a figura como âncora dos entes matemáticos dados nas hipóteses;
- a utilização dos registros de representação;
- a ordenação lógica das informações que compõem a prova.
- o estatuto da definição e do teorema;
- a importância da *demonstração* para explicar logicamente as propriedades da geometria.

No que tange às finalidades desta pesquisa, acreditamos ser preciso dar atenção à necessidade de uma formação adequada do professor para trabalhar a demonstração em geometria, a fim que os alunos possam se apropriar os conceitos-habilidades geométricos, no ensino fundamental.

Bibliografia

BALACHEFF N. Preuve et démonstration en mathématiques au collège. *Recherches en didactique des Mathématiques*. Vol 3.3, p.261-304, La Pensée Sauvage Grenoble, 1982.

BALACHEFF N. Processus de preuve et situations de validation. *Educational Studies in Mathematics*, vol.18, n.2, Mai 1977, p.147-176, 1987.

BALACHEFF N., (1988). *Une étude des processus de preuve en mathématiques chez des élèves de collège*. Thèse d'état, Grenoble: Université Joseph Fourier, 1988.

D'AMBROSIO Beatriz S. e Leslie P. Steffe. O ensino construtivista, Em aberto, Tema: Tendências na Educação Matemática, INEP, 1994.

DANTE, Luis R. *Criatividade e Resolução de problemas na Prática Educativa Matemática*, Tese de Livre – Docência, UNESP, Rio Claro, 1988.

DUVAL R. Approche cognitive des problèmes de géométrie, *Annales de Didactiques et de sciences cognitives*, IREM de Strasbourg v.1, p.57-74, 1988.

DUVAL R, *Sémiosis et pensée humaine: registres sémiotiques et apprentissages intellectuels*,

Peter Lang, 1995.

DUVAL, R. Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et des Sciences Cognitives*, IREM de Strarsbourg v.5, p.37-65, 1993.

.DUVAL, R. & EGRET, M. Comment une classe de quatrième a pris conscience de ce qu'est une démarche de démonstration. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.*, IREM de Strasbourg , Vol.2, p. 41-64, 1989.

DUVAL, R. L'organisation déductive du discours. Interaction entre Structure de surface dans l'accès à la démonstration. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives.*, IREM de Strasbourg, v.2, 1989.

GERVAZONI SILVA DE MELLO, E. *Demonstração: uma seqüência didática para a introdução de seu aprendizado no ensino da geometria*, Dissertação de mestrado em Educação matemática, PUC-SP, 1999.

GOUVÊA, F. T. *Aprendendo e ensinando geometria com a demonstração: uma contribuição para a prática pedagógica do professor de matemática do ensino fundamental*, Dissertação de mestrado em educação matemática, PUC-SP, 1998.

LORENZATO, S., *Os "porquês Matemáticos dos alunos e as Respostas dos Professores"*, Proposição, vol. 10, Faculdade de Educação, UNICAMP, Campinas, 1993.

LORENZATO, S. Por que não ensinar Geometria?, *Educação em Revista* – Sociedade Brasileira de Educação Matemática – SBM, ano 3, n. 4, p. 4 –13, 1º sem. 1995

MULLER, JP. La démonstration em géométrie en quatrième et en troisième. *Repère-IREM*, Topiques Edition v.15 p.7 – 24, Avril 1994.

.PARÂMETROS CURRICULARES NACIONAIS - Matemática - 5a a 8a séries, 1998, MEC.

PAVANELLO, R. N. O abandono do ensino da geometria no Brasil: causas e conseqüências. *Revista Zetetiké*, UNICAMP, ano 1, n. 1, p. 7-17, 1993.

PEREZ, G. *Pressupostos e reflexões teóricas e metodológicas da pesquisa participante no ensino de geometria para as camadas populares*. Tese de doutorado – Faculdade de Educação – UNICAMP, 1991.

SAEB – 1993, *SISTEMA Nacional de Avaliação da Educação Básica* Secretaria de Desenvolvimento, Inovação e Avaliação Educacional, Instituto Nacional de Avaliação de Estudos e Pesquisas Educacionais, Brasília -1995.

VIANNA, Claudia C. S., (1988). *O papel do raciocínio dedutivo no ensino da matemática*.
Dissertação de Mestrado, Universidade Paulista “Campus” de Rio Claro, São Paulo.